BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2013

RİYAZİYYAT

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С.С.МИРЗОЕВ, С.М.БАГИРОВА
mirzoyevsabir@mail.ru, BagirovaSevindj@rambler.ru

В данной работе получены условия на операторные коэффициенты, участвующие в операторно-дифференциальном уравнении четвёртого порядка и в краевом условии, которые обеспечивают корректную разрешимость краевой задачи в абстрактных гильбертовых пространствах типа Соболева. Эта краевая задача, в частности, содержит некоторые нелокальные краевые задачи на полуоси.

Ключевые слова: *операторное уравнение, краевая задача, регулярное решение.*

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство, A - положительно-определенный самосопряженный оператор в H. Обозначим через H_γ шкалу гильбертовых пространств, порождённую оператором A, т.е. $H_\gamma = D(A^\gamma)$, $(x, y)_\gamma = (A^\gamma x, A^\gamma y)$, $x, y \in D(A)$, $\gamma \ge 0$. При $\gamma = 0$ считаем, что $H_0 = H$.

Обозначим через $L_2(R_+; H)$ гильбертово пространство функций $f(t)$, определённых почти всюду в интервале $R_+ = (0, \infty)$, со значениями в H, измеримых, квадратично интегрируемых в смысле Бохнера, с нормой

$$\|f\|_{L_2(R_+;H)} = \left(\int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2}.$$

В дальнейшем $L(X, Y)$ означает пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y. Следуя монографии [1], определим пространство функций

$$W_2^2(R_+; H) = \left\{u: \quad u^{(4)} \in L_2(R_+; H),\ A^4 u \in L_2(R_+; H)\right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^4(R_+;H)} = \left(\left\|u^{(4)}\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\|A^4 u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}\right)^{1/2}.$$

Здесь и в дальнейшем производные понимаются в смысле теории распределений [1]. Определим также следующее подпространство в $W_2^4(R_+;H)$:

$$W_2^4(R_+;H;S) = \left\{u : u \in W_2^4(R_+;H),\, u(0) = 0,\, u'(0) = Su\right\}$$

где $S \in L\left(W_2^4(R_+;H), H_{5/2}\right)$. Из теоремы о следах [1, гл.1] следует корректность этого определения. Аналогично определяются пространства $L_2(R;H)$ и $W_2^4(R;H)$, где $R = (-\infty, \infty)$.

Рассмотрим в H следующую краевую задачу:

$$P_0(d/dt)u(t) = \frac{d^4 u(t)}{dt^4} + A^4 u(t) = f(t), \tag{1}$$

$$u(0) = 0,\, u'(0) = Su, \tag{2}$$

где $f(t)$ и $u(t)$ - функции со значениями в H, а операторы A и S определены выше. Отметим, что, в частности, S может быть и интегральным оператором, действующим из $W_2^4(R_+;H)$ в $H_{5/2}$.

Определение. Если при любом $f(t) \in W_2^4(R_+;H)$ существует функция $u(t) \in W_2^4(R_+;H)$, которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в R_+, граничным условиям (2) в смысле сходимости

$$\lim_{t\to+0}\|u(t)\|_{7/2} = 0, \quad \lim_{t\to+0}\|u'(t) - Su\|_{5/2} = 0$$

и имеет место оценка

$$\|u\|_{W_2^4(R_+;H)} \le const\|f\|_{L_2(R_+;H)},$$

то задача (1), (2) называется регулярно разрешимой, а $u(t)$ - регулярным решением задачи (1), (2).

В данной работе мы укажем условия, которые обеспечивают регулярную разрешимость задачи (1), (2). Отметим, что при $S = 0$ эта задача в более общем виде исследована в [2]. Для операторно-дифференциальных уравнений второго и третьего порядков такие нелокальные задачи исследованы, например, в работах [3-7].

Сперва докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть $\omega_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i),\, \omega_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$. Тогда при любом $x \in H_{5/2}$ имеет место неравенство:

$$\left\|(e^{\omega_1 tA} - e^{\omega_2 tA})x\right\|_{W_2^4(R_+;H)} \le \sqrt[4]{2}\|x\|_{7/2}.$$

Доказательство. Так как $\omega_1^4 = \omega_2^4 = -1$, то по определению

$$\left\| e^{\omega_1 tA}x - e^{\omega_2 tA}x \right\|^2_{W_2^4(R_+;H)} = \left\| A^4\left(e^{\omega_1 tA}x - e^{\omega_2 tA}x\right)\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\| A^4\omega_1^4 e^{\omega_1 tA}x - A^4\omega_2^4 e^{\omega_2 tA}x\right\|^2_{L_2(R_+;H)} =$$

$$= 2\left\| A^4\left(e^{\omega_1 tA}x - e^{\omega_2 tA}x\right)\right\|^2_{L_2(R_+;H)} =$$

$$= 2\left(\left\| A^4 e^{\omega_1 tA}x\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\| A^4 e^{\omega_2 tA}x\right\|^2_{L_2(R_+;H)} - 2\,\mathrm{Re}\left(A^4 e^{\omega_1 tA}x, A^4 e^{\omega_2 tA}x\right)_{L_2(R_+;H)}\right). \quad (3)$$

Далее, полагая $x = A^{-7/2}y,\ y \in H$ и используя спектральное разложение оператора A, получаем:

$$\left\| A^4 e^{\omega_1 tA}x\right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \int_0^\infty \left(A^{1/2}e^{\omega_1 tA}y,\ A^{1/2}e^{\omega_1 tA}y\right)dt = \int_0^\infty \left(A\ e^{(\omega_1+\overline{\omega}_1)tA}y,\ y\right)dt = \int_0^\infty \left(\int_{\mu_0}^\infty \mu e^{-\sqrt{2}\mu t}\left(dE_\mu y, y\right)\right)dt =$$

$$= \int_{\mu_0}^\infty \mu\left(\int_0^\infty e^{-\sqrt{2}\mu t}dt\right)\left(dE_\mu y, y\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mu_0}^\infty \left(dE_\mu y, y\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\|y\|^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\|x\|^2_{7/2}\ . \quad (4)$$

Аналогично имеем:

$$\left\| A^4 e^{\omega_2 tA}x\right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\|x\|^2_{7/2}\ . \quad (5)$$

Далее получаем:

$$\mathrm{Re}\left(A^4 e^{\omega_1 tA}x, A^4 e^{\omega_2 tA}x\right)_{L_2(R_+;H)} = \mathrm{Re}\int_0^\infty \left(A\ e^{(\omega_1+\overline{\omega}_2)tA}y,\ y\right) = \mathrm{Re}\int_0^\infty \mu\left(\int_{\mu_0}^\infty \mu e^{2\omega_1 \mu t}\left(dE_\mu y, y\right)\right)dt =$$

$$= \int_{\mu_0}^\infty \mu\left(\int_0^\infty e^{-\sqrt{2}\mu t}\cos\sqrt{2}t\mu\left(dE_\mu y, y\right)\right)dt = \frac{1}{2\sqrt{2}}\|y\|^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\|x\|^2_{7/2}\ . \quad (6)$$

Следовательно, учитывая (4)-(6) в (3), получаем

$$\left\| e^{\omega_1 tA}x - e^{\omega_2 tA}x\right\|^2_{W_2^4(R_+;H)} = \sqrt{2}\|x\|^2_{7/2}.$$

Лемма доказана.

Обозначим через $P_0 u = P_0(d/dt)u,\quad u \in W_2^4(R_+;H;S)$.

Теорема. Пусть $\kappa = \|S\|_{W_2^4(R_+;H)\to H_{5/2}} < \sqrt[4]{2}$. Тогда задача (1), (2) регулярно разрешима.

Доказательство. Покажем, что $Ker P_0 = \{0\}$. Очевидно, что уравнение $P_0(d/dt)u = 0$ имеет общее решение из пространства $W_2^4(R_+;H)$ в виде

$$u_0(t) = e^{\omega_1 tA}x_1 + e^{\omega_2 tA}x_2\ ,\quad x_1, x_2 \in H_{7/2}\,.$$

Из условия (2) следует, что $x_1 = -x_2$ и $(\omega_1 - \omega_2)x_1 = A^{-1}S\left(e^{\omega_1 tA}x_1 - e^{\omega_2 tA}x_1\right)$, т.е.

$$x_1 = \frac{i}{\sqrt{2}} A^{-1} S\left(e^{\omega_1 tA} - e^{\omega_2 tA}\right) x_1 \equiv Q x_1 . \qquad (7)$$

Из леммы следует, что

$$\|Qx_1\|_{7/2} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \kappa \left\| \left(e^{\omega_1 tA} - e^{\omega_2 tA}\right) x_1 \right\|_{7/2} \le \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \kappa \|x_1\|_{7/2} = q \|x_1\|_{7/2} .$$

Так как $q<1$, то оператор $E-Q$ обратим в $H_{7/2}$ и $x_1 = 0$, следовательно, $x_2 = 0$. Тогда $u_0(t) \equiv 0$. Теперь докажем, что образ оператора P_0 совпадает с пространством $L_2(R_+;H)$. Пусть $f_1(t) = f(t)$ при $t>0$, $f_1(t) = 0$ при $t<0$ и $\tilde{f}_1(\xi)$ есть её преобразование Фурье. Тогда вектор-функция

$$u_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left(\xi^4 E + A^4\right)^{-1} f_1(t) e^{i\xi t} d\xi , \quad t \in R = (-\infty, \infty),$$

принадлежит $W_2^4(R_+;H)$. Действительно, по теореме Планшереля

$$\left\|A^4 u_1\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\|u_1^{(4)}\right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \left\|\xi^4 \left(\xi^4 E + A^4\right)^{-1} \tilde{f}_1(\xi)\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\|A^4 \left(\xi^4 E + A^4\right)^{-1} \tilde{f}_1(\xi)\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \le$$

$$\le \sup_{\xi \in R} \left\|\xi^4 \left(\xi^4 E + A^4\right)^{-1}\right\|^2 \left\|\tilde{f}_1(\xi)\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \sup_{\xi \in R} \left\|A^4 \left(\xi^4 E + A^4\right)^{-1}\right\|^2 \left\|\tilde{f}_1(\xi)\right\|^2_{L_2(R_+;H)} =$$

$$= \left(\sup_{\xi \in R} \left\|\xi^4 \left(\xi^4 E + A^4\right)^{-1}\right\|^2 + \sup_{\xi \in R} \left\|A^4 \left(\xi^4 E + A^4\right)^{-1}\right\|^2 \right) \|f\|_{L_2(R_+;H)}, \qquad (8)$$

где $\tilde{u}_1(\xi)$ есть преобразование Фурье вектор-функции $u_1(t)$. Очевидно, что при $\xi \in R$

$$\left\|A^4 \left(\xi^4 E + A^4\right)^{-1}\right\| \le \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left|\mu^4 \left(\xi^4 + \mu^4\right)^{-1}\right| < 1,$$

$$\left\|\xi^4 \left(\xi^4 E + A^4\right)^{-1}\right\| \le \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left|\xi^4 \left(\xi^4 + \mu^4\right)^{-1}\right| < 1 .$$

Тогда из (8) следует, что $u_1(t) \in W_2^4(R_+;H)$. Обозначим через $\xi_1(t)$ сужение $u_1(t)$ на $[0,\infty)$. Тогда $\xi_1(t) \in W_2^4(R_+;H)$, $\xi_1^{(j)}(0) \in H_{4-j-1/2}$ $\left(j = \overline{0,3}\right)$ и $\xi_1(t)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в R_+. Будем искать решение задачи (1), (2) в виде

$$u(t) = \xi_1(t) + e^{\omega_1 tA} x_1 + e^{\omega_2 tA} x_2 ,$$

где x_1 и $x_2 \in H_{7/2}$ и принадлежат к определению. Из условия (2) получаем, что

$$x_1 = -x_2 - \xi_1(0)$$

и

$$\xi'(0) + (\omega_1 - \omega_2) A x_1 = S(\xi_1(t)) + S\left(\left(e^{\omega_1 tA} - e^{\omega_2 tA}\right) x_1\right) + A \omega_2 \xi_1(0) - S\left(e^{\omega_2 tA} \xi_1(0)\right).$$

Отсюда относительно x_1 получаем уравнение

$$x_1 - Qx_1 = \psi ,$$

где Q определен из равенства (7), а

$$\psi = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(A^{-1}\xi'(0) + \omega_2\xi_1(0) + A^{-1}S(\xi_1(t)) - A^{-1}S\left(e^{\omega_2 tA}\xi_1(0)\right)\right) \in H_{7/2}.$$

Так как оператор $E - Q$ обратим в $H_{7/2}$, то $x_1 = (E-Q)^{-1}\psi$, а $x_2 = -(E-Q)^{-1}\psi$. Векторы x_1, $x_2 \in H_{7/2}$, поэтому $u(t) \in W_2^4(R_+;H)$. Таким образом, образ оператора P_0 совпадает с $L_2(R_+;H)$. С другой стороны,

$$\|P_0 u\|_{L_2(R_+;H)} = \left\|u^{(4)} + A^4 u\right\|_{L_2(R_+;H)} \le \sqrt{2}\|u\|_{W_2^4(R_+;H)}.$$

По теореме Банаха об обратном операторе существует ограниченный обратный $P_0^{-1} : L_2(R_+;H) \to W_2^4(R_+;H;S)$. Таким образом,

$$\|u\|_{W_2^4(R_+;H)} \le const\|f\|_{L_2(R_+;H)}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л., Madженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371с.
2. Мирзоев С.С. Условия корректной разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений // ДАН СССР, 1983, т.273, №2, с.292-295.
3. Kerimov K.A. On solvability second order operator-differential equations with integral of boundary conditions // Proceeding of IMM of NAS of Azerbaijan, 2008, v.28, №5, p.33-42.
4. Алиев А.Р., Бабаева С.Ф. Об одной краевой задаче с операторными коэффициентами // Вестник БГУ, сер. физ.мат. наук, 2010, №1, с.11-16.
5. Aliev A.R, Babayeva S.F. On the boundary value problem with the operator in boundary conditions for the operator-differential equation of the third order // Journal of Mathematical Physic, Analysis, Geometry, 2010, v.6, №4, p. 347-361.
6. Babayeva S.F. On regular solvability of a boundary problem with operator boundary conditions // Transactions of NAS of Azerbaijan, 2010, v.30, №4, p.25-34.
7. Бабаева С.Ф. Об оценках норм операторов промежуточных производных в абстрактных Соболевских пространствах и их применения // Доклады НАНА, Баку, 2009, т.65, №6, с.10-14.
8. Бабаева С.Ф. О корректной разрешимости одной краевой задачи для дифференциального уравнения третьего порядка с операторными коэффициентами // Известия Педагогического Университета, 2012, №2, с.21-25.

OPERATOR ƏMSALLI DÖRDTƏRTİBLİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİR QEYRİ-LOKAL SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

S.S.MİRZƏYEV, S.M.BAĞIROVA

XÜLASƏ

İşdə dördtərtibli operator diferensial tənliyin və sərhəd şərtlərindəki operatorların üzərinə elə şərtlər tapılmışdır ki, onlar baxılan sərhəd məsələsinin abstrakt Sobolev tipli fəzalarda korrekt həll olunmasını təmin edir. Bu məsələni xüsusi halda bir sıra qeyri-lokal sərhəd məsələləri əhatə edir.

Açar sözlər: operator tənlik, sərhəd məsələsi, requlyar həll.

ON A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A FOURTH ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH OPERATOR COEFFICIENTS

S.S.MIRZAYEV, S.M.BAGHIROVA

SUMMARY

In this paper some conditions on operators in a fourth order operator-differential equation and operators in boundary value problems implying the correct solvability of this boundary value problem are obtained. In particular, these boundary conditions comprise some nonlocal boundary value problems.

Key words: operator equation, boundary value problem, regular solution.

Принято в редакцию: 07.01.2013 г.
Подписано к печати: 06.03.2013 г.